Reduktion eines linearen Eigenwertproblems 2. Ordnung mit Hilfe einer bekannten Eigenfunktion

Schaefer, Hermann

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 5, 1953, S. 141-151

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Reduktion eines linearen Eigenwertproblems 2. Ordnung mit Hilfe einer bekannten Eigenfunktion

Von **Hermann Schaefer**

Mit 5 Abbildungen

Summary: If in the eigenvalue problem of the linear 2nd order differential equation one eigenfunction with its eigenvalue is known, a new eigenvalue problem not involving the known eigenvalue can be stated by a contact-transformation. The algebraic eigenvalue problem of the second order equation of finite differences has been treated in a similar way. In this case the new eigenvalue problem may be obtained by simple geometrical constructions, if the eigenfunction of the highest order is used for reduction.

Beim Eigenwertproblem der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung sei eine Eigenfunktion mit dem zugehörigen Eigenwert bekannt. Dann kann durch eine Berührungstransformation ein neues Eigenwertproblem gewonnen werden, das den bekannten Eigenwert nicht mehr enthält. Das algebraische Eigenwertproblem der Differenzengleichung 2. Ordnung wird ähnlich behandelt. Wenn man die Eigenfunktion höchster Ordnung zur Reduktion benutzt, läßt sich das neue Eigenwertproblem durch einfache geometrische Konstruktionen finden.

1. Einleitung

Unsere Untersuchungen beschäftigen sich zunächst mit dem Randwertproblem der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(S(x)\,\varphi'\right) + \lambda\,\Theta(x)\,\varphi = 0. \tag{1.1}$$

Um sofort einen Zusammenhang mit den Anwendungen herzustellen, deuten wir $S(x)$ als Drillsteifigkeit und $\Theta(x)$ als Drehmassenbelegung einer Welle der Länge l mit freien, fest oder elastisch eingespannten Enden. Die Berechnung der Torsionsschwingungen einer solchen Welle führt bekanntlich auf die obige Differentialgleichung mit den zugehörigen Randbedingungen in $x = 0$ und $x = l$ für die Verdrehwinkel $\varphi(x)$ der Wellenquerschnitte.

Um die nachstehenden Rechnungen nicht unnötigerweise zu erschweren, fordern wir, daß $S(x) > 0$ und $\Theta(x) > 0$ stetig und einmal differenzierbar sind.

Wir wollen nun annehmen, daß eine Eigenfunktion $\varphi_0(x)$, also eine Eigenschwingungsform der Welle, bekannt sei. Der zugehörige Eigenwert, das Quadrat der Kreisfrequenz dieser Schwingungsform, sei λ_0. Fügt man nun unserem Eigenwertproblem die Nebenbedingung

$$\int_0^l \Theta(x)\,\varphi_0(x)\,\varphi(x)\,dx = 0 \tag{1.2}$$

bei, so weiß man, daß dieses neue Eigenwertproblem dieselben Eigenwerte wie das ursprüngliche besitzt, λ_0 jedoch ausgenommen. Die Frage, die wir hier aufwerfen und im nächsten Abschnitt beantworten wollen, lautet so: Läßt sich das durch die Gleichungen (1. 1) und (1. 2) mit den zugehörigen Randbedingungen dargestellte Eigenwertproblem von der Nebenbedingung (1. 2) befreien, so daß wieder ein allein durch Differentialgleichung und Randbedingungen formuliertes Eigenwertproblem entsteht?

Offensichtlich muß diese Reduktion — dieser Ausdruck ist der Analytischen Mechanik entlehnt, in der ähnliche Fragestellungen bei der Verwertung bekannter Integrale auftreten — durch eine solche Transformation der abhängigen veränderlichen φ in eine neue φ^* bewerkstelligt werden, welche die Eigenschaft hat, den Integranden der Nebenbedingung (1. 2) zu einem totalen Differential einer Funktion zu machen, die an den Intervallenden verschwindet.

2. Reduktion des Eigenwertproblems

Man erinnert sich, daß die Orthogonalitätsbedingung (1. 2) durch Integration der aus der Lagrangeschen Identität folgenden Gleichheit

$$(\lambda - \lambda_0)\, \Theta \varphi_0 \varphi = \frac{d}{dx}\left[S(\varphi \varphi_0' - \varphi' \varphi_0)\right] \tag{2.1}$$

entsteht. Damit ist der Integrand von (1. 2) bereits durch ein totales Differential der gewünschten Eigenschaft dargestellt.

Als neue abhängige Veränderliche führen wir nun

$$\varphi^* = \varphi - \frac{\varphi_0}{\varphi_0'}\varphi' \tag{2.2}$$

ein und schreiben (2. 1)

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\varphi = \frac{(S\varphi_0'\varphi^*)'}{-\lambda_0\, \Theta \varphi_0}. \tag{2.3}$$

φ_0 als Eigenfunktion von (1. 1) erfüllt die Gleichungen

$$S\varphi_0' = M_0; \quad M_0' = -\lambda_0\, \Theta \varphi_0, \tag{2.4}$$

die wir bei der Entwicklung der rechten Seite von (2. 3) verwerten:

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\varphi = \varphi^* + \frac{M_0}{M_0'}\varphi^{*\prime}. \tag{2.5}$$

Damit haben wir sogleich die Umkehrung der Transformation (2. 2) gewonnen.

In (2. 5) wird φ^* durch (2. 2) ersetzt; dann multiplizieren wir (2. 5) mit $S\frac{\varphi_0'}{\varphi_0}$ und bekommen

$$S\frac{M_0 \varphi_0'}{M_0' \varphi_0}\varphi^{*\prime} = S\varphi' - S\varphi_0' \frac{\lambda \varphi}{\lambda_0 \varphi_0}. \tag{2.6}$$

Zur Abkürzung wird

$$S\frac{M_0 \varphi_0'}{M_0' \varphi_0} = S^* \tag{2.7}$$

gesetzt.

Ferner führen wir die Bezeichnung

$$M = S\varphi', \tag{2.8}$$

$$M^* = S^* \varphi^{*\prime} \tag{2.9}$$

ein, und schreiben damit (2. 6):

$$M^* = M - \frac{M_0}{M_0'} M'. \tag{2.10}$$

Einmalige Differentiation gibt, bei Beachtung von (2. 2):

$$M^{*\prime} = -M_0 \left(\frac{M'}{M_0'}\right)' = -M_0 \frac{\lambda\Theta}{\lambda_0\Theta} \left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)' = -\lambda\Theta \frac{M_0 \varphi_0'}{M_0' \varphi_0} \varphi^*. \tag{2.11}$$

Damit sind wir aber zum Ziele gelangt. Denn mit der Abkürzung

$$\Theta \frac{M_0}{M_0'} \frac{\varphi_0'}{\varphi_0} = \Theta^*, \tag{2.12}$$

die (2. 7) *entspricht, wird* (2. 11)

$$M^{*\prime} = -\lambda\Theta^*\varphi^*, \tag{2.13}$$

und wenn wir aus (2. 9) und (2. 13) M^* *eliminieren, entsteht*

$$\frac{d}{dx}(S^*\varphi^{*\prime}) + \lambda\Theta^*\varphi^* = 0, \tag{2.14}$$

die Differentialgleichung des reduzierten Eigenwertproblems. Da nach (2. 2) $\varphi = \varphi_0$ in $\varphi^* \equiv 0$ transformiert wird, kann (2. 14) nicht den Eigenwert λ_0 besitzen.

3. Die Reduktion als Berührungstransformation

Zu unserer ursprünglichen Eigenwertaufgabe gehört das Variationsproblem

$$\int_0^l L(\varphi', \varphi, x)\, dx = \text{Extrem}. \tag{3.1}$$

mit der Lagrangeschen Funktion

$$L = \frac{1}{2}(S\varphi'^2 - \lambda\Theta\varphi^2). \tag{3.2}$$

Der zur „Koordinate" φ konjugierte „Impuls" ist

$$M = \frac{\partial L}{\partial \varphi'} = S\varphi'. \tag{3.3}$$

Er hat in unserem mechanischen Beispiele die Bedeutung des Torsionsmomentes.

Die Hamiltonsche Funktion

$$H(M, \varphi, x) = \frac{\partial L}{\partial \varphi'}\varphi' - L \tag{3.4}$$

erhält man nach einfacher Rechnung:

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{M^2}{S} + \lambda\Theta\varphi^2\right) \tag{3.5}$$

und die kanonischen *Gleichungen lauten:*

$$\varphi' = \frac{\partial H}{\partial M} = \frac{M}{S}; \qquad M' = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\lambda\Theta\varphi. \tag{3.6}$$

Die entsprechenden kanonischen Gleichungen unseres reduzierten Eigenwertproblems (2. 14) sind (2. 9) und (2. 13). Man erkennt, daß die Transformation des vorigen Abschnittes die kanonischen Gleichungen (3. 6) in neue kanonische Gleichungen transformiert hat. Unsere Transformation ist somit kanonisch und als solche Sonderfall einer Berührungstransformation. In „Koordinaten" und „Impulsen" geschrieben, lauten (2. 2) und (2. 10):

$$\varphi^* = \varphi - \frac{\varphi_0}{M_0} M, \tag{3.7}$$

$$M^* = M - \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{M_0}{\varphi_0} \varphi \tag{3.8}$$

und ihre Umkehrungen:

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right) \varphi = \varphi^* + \frac{\varphi_0}{M_0} M^*, \tag{3.9}$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right) M = M^* + \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{M_0}{\varphi_0} \varphi^*. \tag{3.10}$$

In (3. 9) erkennt man nach einfacher Umformung (2. 5) wieder. Wir drücken noch den alten und neuen „Impuls" durch die alte und neue „Koordinate" aus:

$$M = \frac{M_0}{\varphi_0} (\varphi - \varphi^*), \tag{3.11}$$

$$M^* = \frac{M_0}{\varphi_0} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right) \varphi - \varphi^*\right]. \tag{3.12}$$

Man findet nun leicht die erzeugende Funktion $V(\varphi, \varphi^*, x)$ dieser kanonischen Transformation, da man

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right) M = \frac{\partial V}{\partial \varphi} \quad \text{und} \quad M^* = -\frac{\partial V}{\partial \varphi^*} \tag{3.13}$$

zu verlangen hat. Somit wird

$$V = \frac{1}{2} \frac{M_0}{\varphi_0} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right) (\varphi^2 - 2 \varphi \varphi^*) + \varphi^{*2}\right]. \tag{3.14}$$

Der Identität der Differentialformen

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right) (M \delta \varphi - H \delta x) = M^* \delta \varphi^* - H^* \delta x + \delta V(\varphi, \varphi^*, x) \tag{3.15}$$

entnehmen wir die Hamiltonsche Funktion unseres reduzierten Problems:

$$H^*(M^*, \varphi^*, x) = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right) H(M, \varphi, x) + \frac{\partial V}{\partial x}. \tag{3.16}$$

Das Ergebnis einer elementaren, aber etwas umfangreichen Rechnung lautet:

$$H^* = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{S} \frac{\varphi_0}{\varphi_0'} \frac{M_0'}{M_0} M^{*2} + \lambda \Theta \frac{M_0}{M_0'} \frac{\varphi_0'}{\varphi_0} \varphi^{*2}\right] = \frac{1}{2} \left[\frac{M^{*2}}{S^*} + \lambda \Theta^* \varphi^{*2}\right]. \tag{3.17}$$

Die Resultate des vorigen Abschnittes sind damit bestätigt.

4. Das Eigenwertproblem der Differenzengleichung 2. Ordnung

Wir wollen im folgenden wieder das Beispiel der Torsionsschwingung einer Welle heranziehen. Das Ergebnis der Reduktion, die Differentialgleichung (2. 14), drängt zu einer mechanischen Deutung. φ^* wird man als Schwingungsamplitude einer neuen Welle auffassen, die eine Torsionssteifigkeit S^* und eine Drehmassenbelegung Θ^* besitzt. Sie hat dieselbe Länge wie die ursprüngliche Welle und stimmt mit dieser in sämtlichen Eigenwerten, ausgenommen λ_0, überein. Setzen wir einmal voraus, daß S und Θ im Intervall $x = 0$ bis $x = l$ analytisch sind, so werden S^* und Θ^* meromorphe Funktionen sein, die also Nullstellen und Pole besitzen. Dieser Umstand dürfte im allgemeinen vom Gebrauch der Schwingungsgleichung (2. 14) des reduzierten Systems abschrecken.

Ein naheliegendes und bekanntes Näherungsverfahren zur Berechnung der Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen der Welle geht davon aus,

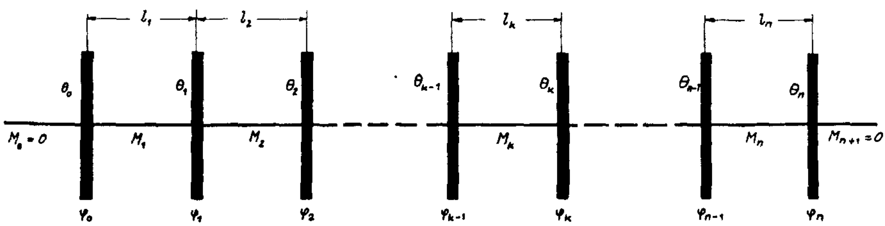

Abb. 1. Welle mit einzelnen Drehmassen als Beispiel einer Schwingerkette

daß die Drehmasse einzelner Wellenabschnitte in je einem Punkte des zugehörigen Wellenabschnittes konzentriert wird. Man erhält so ein schwingungsfähiges System von endlich vielen Freiheitsgraden und ein algebraisches Eigenwertproblem. Auch hier wird man die Frage aufwerfen, wie bei einer bekannten Eigenschwingungsform die Reduktion vorzunehmen ist. Unser System bildet jetzt eine „Schwingerkette", und die Amplituden der einzelnen Massen der Kette berechnen sich aus einer Differenzengleichung 2. Ordnung. Bleiben wir bei unserem Beispiel der Welle mit Einzelmassen. Ihr überall konstanter Kreisquerschnitt habe die Torsionssteifigkeit c. In Abb. 1 finden wir die im folgenden benötigten Bezeichnungen.

Die Wellenabschnitte zwischen den Trägheitsmomenten $\Theta_{\varkappa-1}$ und $\Theta_\varkappa$ haben die Länge $l_\varkappa$. In ihnen herrscht das von der Differenz der Amplituden $\varphi_{\varkappa-1}$ und $\varphi_\varkappa$ abhängige Torsionsmoment $M_\varkappa$. Die beiden Enden der Welle seien frei, so daß

$$M_0 = M_{\varkappa+1} = 0 \tag{4.1}$$

Die Differenzen zweier benachbarten Größen sollen mit dem Symbol Δ gekennzeichnet werden. So bedeutet z. B. $\Delta\varphi_\varkappa = \varphi_\varkappa - \varphi_{\varkappa+1}$.

Das kanonische Gleichungssystem (in Analogie zu 3. 6) lautet hier

$$\Delta\varphi_{\varkappa-1} = \frac{l_\varkappa}{c} M_\varkappa; \qquad \Delta M_\varkappa = -\lambda\Theta_\varkappa\varphi_\varkappa. \tag{4.2}$$

Durch Elimination der $M_\varkappa$ entsteht die Differenzengleichung 2. Ordnung

$$\Delta\left(\frac{c}{l_\varkappa}\Delta\varphi_{\varkappa-1}\right)+\lambda\Theta_\varkappa\varphi_\varkappa=0. \tag{4.3}$$

Es sei jetzt wieder eine Eigenschwingung $\varphi_\varkappa^0$, $M_\varkappa^0$ bekannt, die zum Eigenwert λ_0 gehört. Die Orthogonalitätsbedingung lautet

$$\sum_{\varkappa=0}^{n}\Theta_\varkappa\varphi_\varkappa^0\varphi_\varkappa=0. \tag{4.4}$$

Die Reduktion kann nun den Gedankengängen des 2. Abschnittes entsprechend vorgenommen werden. Neue Gesichtspunkte treten dabei nicht auf, so daß wir uns hier auf die Angabe der Resultate beschränken können.

Zunächst die Transformationsgleichungen:

$$\varphi_\varkappa^*=\varphi_\varkappa-\frac{\varphi_\varkappa^0}{\Delta\varphi_\varkappa^0}\Delta\varphi_\varkappa=\varphi_\varkappa-\frac{\varphi_\varkappa^0}{M_{\varkappa+1}^0}M_{\varkappa+1} \tag{4.5}$$

$$M_\varkappa^*=M_\varkappa-\frac{M_\varkappa^0}{\Delta M_\varkappa^0}\Delta M_\varkappa=M_{\varkappa+1}-\frac{\lambda}{\lambda_0}\frac{M_{\varkappa+1}^0}{\varphi_\varkappa^0}\varphi_\varkappa \tag{4.6}$$

und ihre Umkehrungen:

$$\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\varphi_\varkappa=\varphi_\varkappa^*+\frac{\varphi_\varkappa^0}{M_{\varkappa+1}^0}M_\varkappa^* \tag{4.7}$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)M_\varkappa=M_{\varkappa-1}^*+\frac{\lambda}{\lambda_0}\frac{M_\varkappa^0}{\varphi_{\varkappa-1}^0}\varphi_{\varkappa-1}^*. \tag{4.8}$$

Es empfehlen sich jetzt die Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_\varkappa=\frac{\varphi_{\varkappa-1}^0}{\Delta\varphi_{\varkappa-1}^0};\quad\beta_\varkappa=\frac{M_\varkappa^0}{\Delta M_\varkappa^0};\quad 1-\alpha_\varkappa=\frac{-\varphi_\varkappa^0}{\Delta\varphi_{\varkappa-1}^0};\quad 1-\beta_\varkappa=\frac{-M_{\varkappa+1}^0}{\Delta M_\varkappa^0}\\&\text{wobei wegen (4.1):}\qquad\qquad \beta_0=0;\quad\beta_n=1.\end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

Analog (2. 12) haben wir

$$\Theta_\varkappa^*(1-\alpha_{\varkappa+1})=(1-\beta_\varkappa)\Theta_\varkappa \tag{4.10}$$

oder

$$\Theta_\varkappa^*\alpha_{\varkappa+1}=\beta_{\varkappa+1}\Theta_{\varkappa+1} \tag{4.11}$$

und (2. 7) entsprechend

$$l_\varkappa^*(1-\beta_\varkappa)=(1-\alpha_\varkappa)l_\varkappa \tag{4.12}$$

oder

$$l_\varkappa^*\beta_\varkappa=\alpha_{\varkappa+1}l_{\varkappa+1}. \tag{4.13}$$

Diese jeweils doppelten Darstellungen für $\Theta_\varkappa^*$ und $l_\varkappa^*$ folgen aus der Tatsache, daß der Quotient c/λ_0 für jeden Wellenabschnitt denselben Wert hat.

Durch Addition bekommt man

$$\Theta_\varkappa^* = (1 - \beta_\varkappa)\,\Theta_\varkappa + \beta_{\varkappa+1}\Theta_{\varkappa+1}, \tag{4.14}$$

$$l_\varkappa^* = (1 - \alpha_\varkappa)\ \ l_\varkappa + \alpha_{\varkappa+1}\ \ l_{\varkappa+1}. \tag{4.15}$$

Die „kanonischen" Gleichungen des reduzierten Systems lauten:

$$\Delta\varphi_{\varkappa-1}^* = \frac{l_\varkappa^*}{c}\,M_\varkappa^*;\quad \Delta M_\varkappa^* = -\lambda\Theta_\varkappa^*\,\varphi_\varkappa^*. \tag{4.16}$$

Sie sind vom Standpunkt der Mechanik nur dann sinnvoll, wenn bei der Reduktion sämtliche $\Theta_\varkappa^*$ und $l_\varkappa^*$ positiv werden, was sicherlich der Fall ist, wenn $0 < \alpha_\varkappa < 1$ und $0 < \beta_\varkappa < 1$.

Ein Blick auf (4. 9) zeigt, daß dann benachbarte $\varphi_\varkappa^0$ und $M_\varkappa^0$ verschiedene Vorzeichen haben müssen. Unter den insgesamt n Eigenschwingungsformen der beiderseits freien Welle mit $n + 1$ Massen hat aber nur die Eigenschwingungsform höchster Ordnung in jedem Wellenabschnitt einen Knoten. Das durch Reduktion mit dieser Schwingungsform entstandene System ist also mechanisch sinnvoll, wenn das ursprüngliche System es war.

Es bleibt jetzt noch übrig, für diesen Sonderfall der Reduktion die Zusammenhänge beider Systeme anschaulich darzustellen.

Nach 4.14) ist wegen $\beta_0 = 0$

$$\Theta_0^* = \Theta_0 + \beta_1\Theta_1 \tag{4.17}$$

und wegen $\beta_n = 1$

$$\Theta_{n-1}^* = (1 - \beta_{n-1})\,\Theta_{n-1} + \Theta_n, \tag{4.18}$$

$$\Theta_n^* = 0. \tag{4.19}$$

Das reduzierte System besitzt demnach nur n Drehmassen $\Theta_\varkappa^*$. Diese werden durch Wellenstücke der Länge $l_\varkappa^*$ getrennt. Die Enden der Welle sind wieder frei, denn nach den Transformationsgleichungen für die Momente (4. 6) folgt aus den Randbedingungen (4. 1)

$$M_0^* = M_n^* = 0. \tag{4.20}$$

Wir wollen uns ferner um eine anschauliche Deutung der Transformationsgleichungen für die Drehwinkel (4. 5) und (4. 7) bemühen. Dazu schreiben wir (4. 5)

$$\varphi_\varkappa^* = \frac{-\varphi_{\varkappa+1}^0}{\Delta\varphi_\varkappa}\,\varphi_\varkappa + \frac{\varphi_\varkappa^0}{\Delta\varphi_\varkappa}\,\varphi_{\varkappa+1} \tag{4.21}$$

$$= (1 - \alpha_{\varkappa+1})\,\varphi_\varkappa + \alpha_{\varkappa+1}\,\varphi_{\varkappa+1}. \tag{4.22}$$

$\varphi_\varkappa^0$ sei die Eigenschwingungsform höchster Ordnung. Im reduzierten System entspricht ihr $\varphi_\varkappa^* \equiv 0$. In Abb. 2, das zwei benachbarte Wellenabschnitte des ursprünglichen Systems zeigt, ist die Schwingungsform höchster Ordnung gezeichnet. Ihre Knoten $N_\varkappa$ teilen jeden Wellenabschnitt, und zwar denjenigen der Länge $l_\varkappa$ in die beiden Teillängen $\alpha_\varkappa\,l_\varkappa$ und $(1 - \alpha_\varkappa)\ l_\varkappa$.

Im reduzierten System, Abb. 3, ist der Wellenabschnitt der Länge $l_\varkappa^*$, (4. 15), begrenzt durch die Drehmassen $\Theta_{\varkappa-1}^*$ und $\Theta_\varkappa^*$. Die Wellenabschnitte des reduzierten Systems haben also die Länge der Knotenabstände der Eigenschwingungsform höchster Ordnung des ursprünglichen Systems.

Um nun die Zusammensetzung der Drehmassen $\Theta_\varkappa^*$ nach (4.14) zu verstehen, multiplizieren wir (4. 22) auf beiden Seiten mit $\Theta_\varkappa^*$ und formen rechts mit (4. 10) und (4. 11) um:

$$\Theta_\varkappa^* \varphi_\varkappa^* = (1 - \beta_\varkappa)\, \Theta_\varkappa \varphi_\varkappa + \beta_{\varkappa+1}\, \Theta_{\varkappa+1}\, \varphi_{\varkappa+1} \tag{4.23}$$

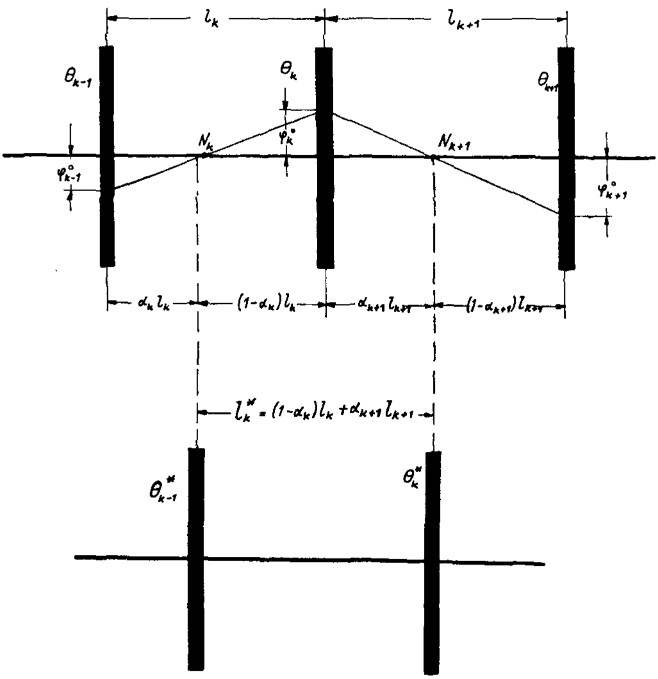

Abb. 2 und 3. Zwei benachbarte Wellenabschnitte, mit den Amplituden der Eigenschwingungsform höchster Ordnung. Darunter ein Ausschnitt aus dem reduzierten System

Wegen der Transformation $\varphi_\varkappa^0 \longrightarrow \varphi_\varkappa^* = 0$ folgt hieraus für zwei benachbarte Wellenabschnitte:

$$0 = (1 - \beta_{\varkappa-1})\, \Theta_{\varkappa-1} \varphi_{\varkappa-1}^0 + \beta_\varkappa\, \Theta_\varkappa\, \varphi_\varkappa^0, \tag{4.24}$$

$$0 = (1 - \beta_\varkappa)\, \Theta_\varkappa \varphi_\varkappa^0 + \beta_{\varkappa+1}\, \Theta_{\varkappa+1}\, \varphi_{\varkappa+1}^0. \tag{4.25}$$

Die mechanische Bedeutung dieser Gleichungen wird in Abb. 4 erläutert. Die Drehmassen sind hier so aufgeteilt, daß alle Wellenstücke, getrennt von ihren benachbarten, mit derselben Eigenfrequenz, nämlich der zu $\varphi_\varkappa^0$ gehörigen, schwingen. (4. 24) und (4. 25) besagen, daß der Gesamtdrall eines jeden dieser Elementarsysteme Null ist. Die Zahlen $\beta_\varkappa$ lassen sich, wenn die $\varphi_\varkappa^0$ bekannt sind, aus (4. 25) *rekursiv* errechnen. Das reduzierte System wird dann durch Vereinigung der beiden Drehmassen $(1 - \beta_{\varkappa-1})\,\Theta_{\varkappa-1}$ und $\beta_\varkappa\,\Theta_\varkappa$ zu Θ^* im Knoten $N_\varkappa$ eines jeden Elementarsystems gebildet.

Deutet man $(1 - \beta_{\varkappa-1})\,\Theta_{\varkappa-1}$ und $\beta_\varkappa\,\Theta_\varkappa$ als positive Gewichte im Abstande $l_\varkappa$, so ist $N_\varkappa$ ihr Schwerpunkt. Im Sinne des Gleichnisses betrachten wir die Transformation (4. 23). $\varphi_\varkappa$ sei eine Eigenschwingungsform des ursprünglichen Systems, verschieden von $\varphi_\varkappa^0$. Der Verdrehwinkel eines Wellenstückes verläuft über der Länge $l_\varkappa$ linear vom Anfangswert $\varphi_{\varkappa-1}$ bis zum Endwert $\varphi_\varkappa$ (Abb. 5). *$\varphi_\varkappa^*$ ist demnach gleich dem Verdrehwinkel* der Welle im

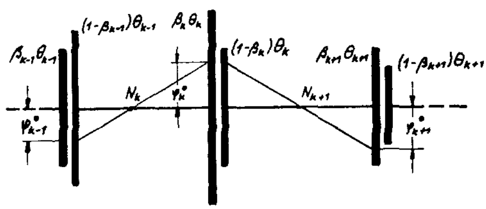

Abb. 4. Die Elementarsysteme gleicher Frequenz

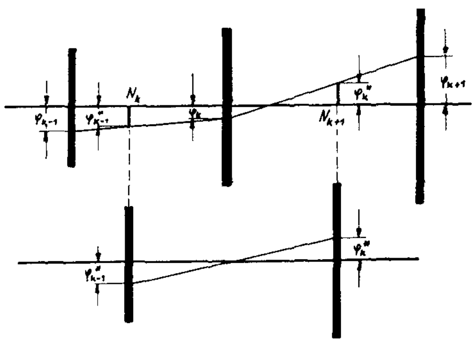

Abb. 5. Zusammenhang der Eigenschwingungsformen des ursprünglichen und des reduzierten Systems

Punkte $N_{\varkappa+1}$. Dies ist der geometrische Zusammenhang der Schwingungsformen gleicher Frequenz des ursprünglichen und des reduzierten Systems.

Die Rücktransformation von $\varphi_\varkappa^*$ nach $\varphi_\varkappa$ ist in (4. 7) gegeben. Die einfache Umrechnung in

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right) l_\varkappa^* \varphi_\varkappa = \alpha_{\varkappa+1}\, l_{\varkappa+1}\, \varphi_{\varkappa-1}^* + (1 - \alpha_\varkappa)\, l_\varkappa \varphi_\varkappa^* \tag{4.26}$$

und die ebenfalls sehr einfache geometrische Interpretation möge dem Leser überlassen sein.

5. Schlußbetrachtung

Wir haben im letzten Abschnitt den vollständigen Beweis eines Verfahrens mitgeteilt, das in der Ingenieurmechanik den Namen „Verfahren von Baranow" führt und bei der *Berechnung* der Torsionsschwingungen von Maschinenwellen Anwendung findet. Baranow beschreibt in seiner kurzen Mitteilung [1] am Beispiel der Welle mit 4 Drehmassen, wie das reduzierte System gebildet wird, allerdings ohne eine Begründung zu geben. Jedoch vermerkt er, daß ein Beweis in seiner russischen Arbeit [2] zu finden sei. Diese Veröffentlichung ist aber, wie Klotter und Haug (s. weiter unten) versichern, nicht erreichbar. Baranow bedient sich bei seiner Reduktion eines exakten graphischen Verfahrens, einer Seileckskonstruktion, die er dem älteren, im übrigen ungenauen, Kutzbachschen Näherungsverfahren entlehnt. Die Transformationen der Eigenschwingungsformen bei der Reduktion, wie sie im letzten Abschnitt auseinandergesetzt worden sind, wird Baranow nicht gekannt haben, denn sonst hätte er sich nicht mit der Ermittlung der Eigenschwingungszahlen allein begnügt, wo man doch seinen Konstruktionen ohne Rechnung und mit wenigen Zeichenstrichen sämtliche Eigenschwingungsformen entnehmen kann.

Der nicht erreichbare Beweis und der Zusammenhang mit dem Kutzbachschen Näherungsverfahren mag Klotter in seiner „Analyse der verschiedenen Verfahren zur Berechnung der Torsionsschwingungen von Maschinenwellen" [3] dazu bewogen haben, das Verfahren von Baranow als Näherungsverfahren — von allerdings erstaunlicher Genauigkeit — zu werten.

Demgegenüber betont Haug in seiner im Vorjahr erschienenen Monographie „Die Drehschwingungen in Kolbenmaschinen" [4] nachdrücklich die Exaktheit des Baranowschen Verfahrens und gibt auch im Anhang seines Buches die Skizze eines Beweises, dessen vollständige Ausführung er für eine spätere Veröffentlichung plant. Haug legt seinem Beweise die algebraische Gleichung zugrunde, deren Nullstellen die Eigenschwingungszahlen sind, und die durch Entwicklung einer Determinante $n+1$-ten Grades entsteht. Es muß nun untersucht werden, wie sich bei einer Reduktion (die Kenntnis der von Baranow gegebenen Zusammensetzung des reduzierten Systems wird vorausgesetzt) die Koeffizienten dieser algebraischen Gleichung, die selbst wieder Unterdeterminanten sind, transformieren. Obwohl kein Zweifel daran besteht, daß der Beweis auf diese Art erbracht werden kann, muß befürchtet werden, daß sein Umfang in keiner Weise der Einfachheit des Baranowschen Verfahrens entsprechen wird. Denn es ist klar, daß die Transformationen von Determinanten unvergleichlich komplizierter sind als z.B. die linearen Transformationen des vorigen Abschnittes, die bei dem Haugschen Beweisverfahren verborgen bleiben. Wohl deshalb ist auch Haug der Ansicht, daß das Baranowsche Verfahren nicht die Eigenschwingungsformen liefern könnte.

Abschließend möchte Verfasser nicht die Bemerkung versäumen, daß er die Anregung zu vorliegender Arbeit der Lektüre des vorzüglichen Haugschen Buches verdankt.

Zusammenfassung

Das homogene Randwertproblem einer gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung läßt sich, wenn eine Eigenfunktion mit zugehörigem Eigenwert bekannt ist, auf das Eigenwertproblem einer neuen Differentialgleichung derselben Gestalt, aber mit geänderten Koeffizienten, transformieren, deren

Eigenwerte mit denen des ursprünglichen Problems, dessen bekannten Eigenwert jedoch ausgenommen, übereinstimmen. Es wird gezeigt, daß diese Transformation, hier Reduktion genannt, eine Berührungstransformation ist. Eine solche Reduktion kann auch beim algebraischen Eigenwertproblem der Differenzengleichung 2. Ordnung durchgeführt werden, wie es am Beispiel einer mechanischen Schwingerkette erläutert wird, bei der eine Reduktion mit Hilfe der Eigenschwingungsform höchster Ordnung eine geometrisch anschauliche Deutung gestattet. Eng verbunden mit unseren Betrachtungen ist das Verfahren von Baranow für die Ermittlung der Torsionsfrequenzen von Maschinenwellen.

Literatur

[1] Baranow, G., Zur Berechnung der Drehschwingungszahlen. Z. VDI. **76** (1932), S. 184.
[2] Baranow, G., Metal Ind. Herald Moscow **11** (1931), S. 60.
[3] Klotter, K., Analyse der verschiedenen Verfahren zur Berechnung der Torsionsschwingungen von Maschinenwellen. Ing.-Archiv **17** (1949), S. 1–61.
[4] Haug, K., Die Drehschwingungen in Kolbenmaschinen. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1952.